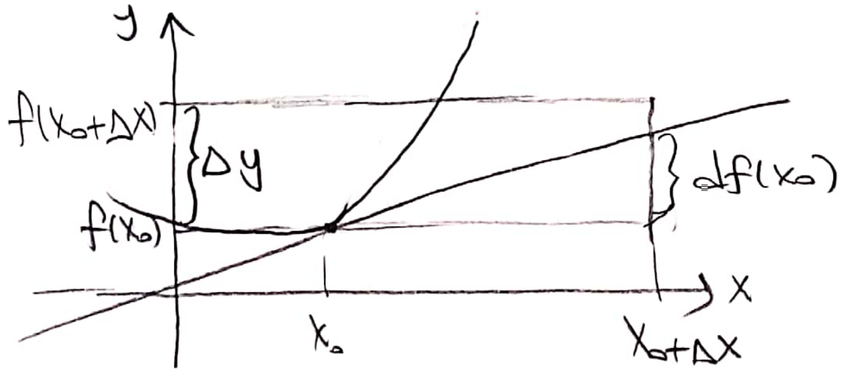
$y=f(x)$ fonksiyonunun $x_0 \in D_f$ noktasındaki diferansiyelinin

$df(x_0) = f'(x_0)dx$ olduğunu biliyoruz.



Yani diferansiyel teğetin değişim oranıdır.

Örnek: $y=x^2+3x-2$ eğrisinin $x_0=0$ apsisli noktasındaki teğetinin veya lineerleştirmesinin denklemi nedir.

$$y' = 2x+3 \qquad y'(0) = m_T = 3$$

$x=0$ için $y=-2$ $\quad (0,-2)$ noktasında

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$
$$L(x) = -2 + 3x$$

Tanım: Bir f fonksiyonunun teğetinin bulunduğu ilgili noktada teğete dik olan doğruya fonksiyonun o noktadaki normali denir. Normal doğrusunun eğimi m_N ile gösterilir. Ayrıca $m_T \cdot m_N = -1$ dir.

Örnek: $y=(x^2+8x-1)^{1/3}$ eğrisinin $x_0=1$ noktasındaki normalinin denklemi?

$x_0=1$ için $y_0=2$

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+8x-1)^{-2/3}(2x+8)$$

$m_T=y'(1)=\frac{5}{6}$ $\quad m_T.M_N=-1 \Rightarrow M_N=-\frac{6}{5}$

Normalin denklemi $y-2=-\frac{6}{5}(x-1)$ dir.

Örnek: $x=\frac{1}{t^2}$, $y=t^3+1$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{-2t^{-3}}=-\frac{3}{2}t^5$$

$x=1$ için $\frac{1}{t^2}=1$, $t=\mp 1$

$m_{T_1}=-\frac{3}{2}$, $m_{T_2}=\frac{3}{2}$ olur.

$t=1$ için $x=1$ ve $y=2$ $\quad (1,2)$, $m_{T_1}=-\frac{3}{2}$

$t=-1$ için $x=1$ ve $y=0$ $\quad (-1,0)$, $m_{T_2}=\frac{3}{2}$

$$L(x)\cong 2+\left(-\frac{3}{2}\right).(x-1)$$

$$L(x)\cong 0+\left(\frac{3}{2}\right)(x-1)$$

Türev Yardımıyla Belirsizliklerin Giderilmesi

L'Hopitâl Kuralı: Limitte belirsizlikleri incelerken $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ şeklindeki belirsizliklerin eğer varsa değerini bulmak için zaman zaman çok fazla işlem yapmaya gerek duymuştuk. Şimdi bu tür belirsizliklerin daha pratik bir şekilde ortadan kaldırmak için kullanılan L'hopitâl kuralını vereceğiz.

Teorem: f ve g fonksiyonları için

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ veya $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mp\infty$

2) f ve g fonksiyonları a nın delinmiş bir komşuluğunda türevlenebilir ve $\forall x$ için $g'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti vardır

koşulları sağlanıyorsa

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ dir. Eğer belirsizlik yine

ortadan kalkmamışsa kural uygulanmaya devam edilir.

Bu teoremde $x\to a$ yerine $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to +\infty$ veya $x\to -\infty$ alındığında da kural geçerlidir.

UYARI: $\left[\frac{0}{0}\right]$ veya $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ belirsizlikleri haricinde L'Hopitâl kuralı uygulanmaz. Diğer belirsizlikler önce $\left[\frac{0}{0}\right]$ veya $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a dönüştürülür. Sonra bu kural uygulanır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3(-\sin 3x)}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3.\cos 3x}{1} = \frac{3}{2}.3.1 = \frac{9}{2}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = ?$ $\quad [0.\infty]$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Üstel Belirsizlikler

(0^0), (1^∞), (∞^∞) belirsizlikleri için oranan limite isim verilir ve her iki tarafın logaritması alınarak diğer belirsizliklere çevrilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} x^x = ?$ $\quad (0^0)$ belirsizliği

$$y = \lim_{x\to 0} x^x$$

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0} x^x\right) \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \ln x^x$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}(x.\ln x) \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = \boxed{y=1}$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = ?$ (1^{∞}) belirsizliği

$$y = \lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}\right) \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\sin 2x)\right) = \infty\cdot 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{1} = 2 \Rightarrow \ln y = 2 \Rightarrow y = e^{2}$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = \infty^{0}$ belirsizliği

$$y = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \ln y = \ln\left(\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = [0.\infty]$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{"L'Hop."}$$

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ dir.}$$

UYARI: 1^{∞} belirsizliği için

$u(x) \to 0 \quad v(x) \to \infty$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a} (1+u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \to a} u(x)v(x)}$$ dir.

Örnek: $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{2x}} = e^{\frac{3}{2}}$$

Örnek: $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+6}\right)^{12x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-8}{3x+6}\right)^{12x-1}$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{-96x+8}{3x+6}} = e^{-32}$$

bulunur.